

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Istorie

Varianta 1

Filiera teoretică, profil umanist, toate specializările; Filiera vocațională - profil artistic, toate specializările; - profil sportiv, toate specializările; - profil pedagogic, specializările: bibliotecar-documentarist, instructor-animator, instructor pentru activități extrașcolare, pedagog școlar, educator-puericultor; - profil teologic, toate specializările.

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

Citiți, cu atenție, sursele de mai jos:

A. „De la jumătatea secolului al XVI-lea [...] suzeranitatea otomană devine mai apăsătoare, iar obligațiile față de sultan sporesc. [...] Controlul Imperiului Otoman, extins în toată Peninsula Balcanică până la Dunărea Mijlocie, sporea sentimentul de nesiguranță al popoarelor din această regiune. Totuși, românii, conștienți de soarta grea a grecilor, bulgarilor, albanezilor, sârbilor, croaților, ungarilor etc., ocupați de otomani, au continuat rezistența și au menținut statutul de autonomie a țărilor lor. Deși au plătit tribut și alte dări turcilor, deși li s-a îngrădit politica externă, trebuind să cedeze sultanului unele dintre teritoriile lor, românii și-au menținut statele cu domni proprii, turcilor fiindu-le interzis să se așeze stabil în ele și să aibă pământuri acolo, să facă politică de atragere la islam a creștinilor și să clădească moschei. [...]

În primele decenii ale secolului al XVI-lea, domnii Țării Românești și Moldovei au dus o politică de alianțe antiotomane, deși continuau lungi perioade de timp să plătească tribut turcilor. [...] Domnii Moldovei, de la Petru Rareș până la Ion Vodă și Aron Vodă [...] au avut o politică antiotomană activă, cu rezistențe armate și cu bătălii sângeroase.”

(I. A. Pop, *Istoria ilustrată a românilor pentru tineri*)

B. „Transformarea Transilvaniei în Principat autonom sub suzeranitatea Porții [Imperiul Otoman] a însemnat o grea lovitură dată Habsburgilor, pentru care potențialul economic al acestei provincii reprezenta o puternică atracție. În același context, poziția Principatului între otomani și Habsburgi conferea, din punct de vedere militar și strategic, un considerabil avantaj pentru cel care îl controla. Prin urmare, stăpânirea noului Principat autonom a constituit o preocupare constantă a politicii externe a celor două imperii. În timpul principelui Ioan Sigismund, Transilvania a devenit teatrul unor confruntări acerbe, care s-au redeschis după moartea sultanului Süleyman Magnificul (1566). Habsburgii vor relua disputa, mai ales datorită faptului că, după epoca sultanului Süleyman, Imperiul Otoman a intrat într-o fază staționară. [...] Pacea încheiată la 21 februarie 1568, cu o durată de 8 ani, confirmă slăbiciunile otomane. Împăratul păstra în stăpânirea sa Ungaria apuseană, Dalmația, Croația și Slovenia, în timp ce Ioan Sigismund și domnitorii Țării Românești și Moldovei își mențineau controlul asupra teritoriilor aflate efectiv în posesia lor.”

(I. A. Pop, T. Năgler, M. András, *Istoria Transilvaniei*)

Pornind de la aceste surse, răspundeți la următoarele cerințe:

1. Numiți Principatul autonom precizat în sursa **B**. **2 puncte**
2. Precizați, din sursa **A**, o informație referitoare la politica externă a domnilor români. **2 puncte**
3. Menționați două spații istorice la care se referă atât sursa **A**, cât și sursa **B**. **6 puncte**
4. Scrieți, pe foaia de examen, litera corespunzătoare sursei care susține că popoarele balcanice sunt ocupate de otomani. **3 puncte**
5. Scrieți o relație cauză-efect stabilită între două informații selectate din sursa **B**, precizând rolul fiecăreia dintre aceste informații (*cauză*, respectiv *efect*). **7 puncte**
6. Prezentați alte două fapte istorice la care participă românii în secolul al XVI-lea, în afara celor precizate în sursele **A** și **B**. **6 puncte**
7. Menționați o asemănare între două acțiuni desfășurate de români în relațiile internaționale din secolele al XVII-lea – al XVIII-lea. **4 puncte**

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

Citiți, cu atenție, sursa de mai jos:

„În august 1857, la Osborne, Napoleon al III-lea și regina Victoria au acceptat un compromis în problema românească: Franța renunța să mai susțină unirea deplină a Principatelor sub un prinț străin, iar Anglia și-a dat acordul pentru anularea alegerilor falsificate din Moldova și organizarea altora noi. [...]

În luna octombrie 1857, s-au deschis la București și Iași cele două Adunări ad-hoc, care [...] aveau însă prerogative limitate. Ele au fost create de marile puteri doar pentru a afla opinia poporului român față de unire. Totuși, Adunările ad-hoc au votat cu entuziasm declarații de unire a Moldovei cu Țara Românească, avansând și numele viitorului stat suveran (România), precum și dorința de instaurare a unei monarhii ereditare străine. [...]

După negocieri și compromisuri, [...] în 1858, a fost semnată Convenția de la Paris [...]. Convenția prevedea că noul stat se va numi *Principatele Unite ale Moldovei și Țării Românești*, va avea doi domni pământeni, două capitale, două guverne și două foruri legislative distincte. [...] Armatele celor două țări erau puse sub comandă unică, iar la Focșani se înființau o Comisie Centrală și o Înalță Curte de Casație care să elaboreze legi comune, să conducă în viitor la o uniformizare legislativă și administrativă. Convenția nu interzicea în mod expres unirea deplină, lăsând pe seama poporului român să găsească soluția cea mai potrivită. [...] În conformitate cu prevederile Convenției de la Paris, în Principate au fost constituite comisii provizorii [...] având sarcina de a asigura formarea adunărilor electivă, care urmau să desemneze cei doi domnitori. [...] La Iași, capitala Moldovei, a fost ales domnitor Al. I. Cuza, cu unanimitatea deputaților prezenți. [...] La București, [...] ideea alegerii aceluiași domnitor – și ca urmare a lipsei de precizie a Convenției de la Paris, care nu interzicea explicit alegerea aceleiași persoane ca domnitor în cele două Principate – a căpătat susținere [...]. Urmarea a fost alegerea lui Al. I. Cuza cu unanimitate de voturi.”

(I. Bolovan, I. A. Pop, *Marea istorie ilustrată a României și a Republicii Moldova*)

Pornind de la această sursă, răspundeți la următoarele cerințe:

1. Numiți domnitorul român precizat în sursa dată. **2 puncte**
2. Precizați secolul la care se referă sursa dată. **2 puncte**
3. Menționați un stat participant la evenimentul de la Osborne și o decizie adoptată în cadrul acestui eveniment, precizate în sursa dată. **6 puncte**
4. Menționați, din sursa dată, două informații referitoare la Adunările ad-hoc. **6 puncte**
5. Formulați, pe baza sursei date, un punct de vedere referitor la Convenția de la Paris, susținându-l cu două informații selectate din sursă. **10 puncte**
6. Argumentați, printr-un fapt istoric relevant, afirmația conform căreia statul român participă la relațiile internaționale din perioada 1875-1900. (Se punctează prezentarea unui fapt istoric relevant și utilizarea conectorilor care exprimă cauzalitatea și concluzia.) **4 puncte**

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

Elaborați, în aproximativ două pagini, un eseu despre România în perioada postbelică, având în vedere:

- precizarea unei acțiuni politice desfășurate în România, în perioada 1946-1947;
- menționarea a două practici politice utilizate în România, în perioada stalinismului și a câte unui aspect referitor la fiecare dintre acestea;
- prezentarea unui fapt istoric prin care România participă la relațiile internaționale din perioada *Războiului rece*;
- formularea unui punct de vedere referitor la schimbarea regimului politic din România la sfârșitul secolului al XX-lea și susținerea acestuia printr-un argument istoric.

Notă! Se punctează și utilizarea **limbajului istoric adecvat**, **structurarea** prezentării, **evidențierea relației cauză-efect**, elaborarea **argumentului istoric** (prezentarea unui fapt istoric relevant și utilizarea conectorilor care exprimă cauzalitatea și concluzia), respectarea **succesiunii cronologice/logice** a faptelor istorice și **încadrarea** eseului în limita de spațiu precizată.

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Istorie

Varianta 1

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Filiera teoretică, profil umanist, toate specializările; Filiera vocațională - profil artistic, toate specializările; - profil sportiv, toate specializările; - profil pedagogic, specializările: bibliotecar-documentarist, instructor-animator, instructor pentru activități extrașcolare, pedagog școlar, educador-puericilor; - profil teologic, toate specializările.

- Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerințelor.
- Nu se acordă punctaje intermediare, altele decât cele precizate explicit în barem. Nu se acordă fracțiuni de punct.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1. **2 puncte** pentru răspunsul: Transilvania **Se punctează orice mod de redactare a răspunsului corect (prin precizare/menționare sau în enunț).**
2. **2 puncte** pentru oricare dintre răspunsurile: *li s-a îngrădit politica externă, domniile Țării Românești și Moldovei susțin o politică antiotomană etc.* **Se punctează orice mod de redactare a răspunsului corect (prin citat din sursă/menționare sau în enunț).**
3. **câte 3 puncte** pentru oricare două dintre răspunsurile: Țara Românească, Moldova, Imperiul Otoman/Poarta **Se punctează orice mod de redactare a răspunsului corect (prin precizare/menționare sau în enunț).** (3px2=6p)
4. **3 puncte** pentru scrierea literei **A**
5. **7 puncte** pentru scrierea oricărei relații cauză-efect stabilite între două informații selectate din sursa **B**, precizând rolul fiecăreia dintre aceste informații (*cauză, respectiv efect*)
Exemple: cauză: *În același context, poziția Principatului între otomani și Habsburgi conferea, din punct de vedere militar și strategic, un considerabil avantaj pentru cel care îl controla și efect: Prin urmare, stăpânirea noului Principat autonom a constituit o preocupare constantă a politicii externe a celor două imperii.* SAU cauză: *datorită faptului că, după epoca sultanului Süleyman, Imperiul Otoman a intrat într-o fază staționară și efect: Habsburgii vor relua disputa etc.*
6. **câte 1 punct** pentru menționarea oricăror alte două fapte istorice la care participă românii în secolul al XVI-lea, în afara celor precizate în sursele **A și B** (1px2=2p)
Exemple: aderarea la Liga Sfântă, Lupta de la Giurgiu, Tratatul de la Mănăstirea Dealu **etc.**
câte 2 puncte pentru prezentarea fiecărui fapt istoric menționat - o scurtă expunere în care sunt precizate două informații referitoare la faptul istoric (2px2=4p)
7. **4 puncte** pentru menționarea oricărei asemănări între două acțiuni desfășurate de români în relațiile internaționale din secolele al XVII-lea – al XVIII-lea **Exemple:** au caracter antiotoman, colaborarea cu state creștine **etc.** **Se punctează orice mod de redactare a răspunsului corect (prin precizare/menționare sau în enunț).**

SUBIECTUL al II – lea

(30 de puncte)

1. **2 puncte** pentru răspunsul: Al. I. Cuza **Se punctează orice mod de redactare a răspunsului corect (prin precizare/menționare sau în enunț).**
2. **2 puncte** pentru răspunsul: al XIX-lea **Se punctează orice mod de redactare a răspunsului corect (prin precizare/menționare sau în enunț).**
3. **3 puncte** pentru oricare dintre răspunsurile: Franța, Anglia
3 puncte pentru menționarea oricărei decizii adoptate în cadrul acestui eveniment, precizate în sursa dată **Exemple:** *Franța renunța să mai susțină unirea deplină a Principatelor sub un prinț străin, Anglia a fost de acord cu anularea alegerilor falsificate din Moldova etc.* **Se punctează orice mod de redactare a răspunsului corect (prin citat din sursă/menționare sau în enunț).**
4. **câte 3 puncte** pentru menționarea, din sursa dată, a oricăror două informații referitoare la Adunările ad-hoc (3px2=6p)
Exemple: *În luna octombrie 1857, s-au deschis la București și Iași cele două Adunări ad-hoc; aveau prerogative limitate; Adunările ad-hoc au votat declarații de unire a Moldovei cu Țara Românească etc.* **Se punctează orice mod de redactare a răspunsului corect (prin citat din sursă/menționare sau în enunț).**

5. **4 puncte** pentru formularea, pe baza sursei date, a oricărui punct de vedere referitor la Convenția de la Paris
câte 3 puncte pentru selectarea, din sursa dată, a oricăror două informații care susțin punctul de vedere formulat **(3px2=6p)**
Exemple: Convenția de la Paris stabilea organizarea instituțională a Principatelor Române. Informațiile care susțin punctul de vedere sunt: *Convenția prevedea că noul stat se va numi Principatele Unite ale Moldovei și Țării Românești, va avea doi domni pământeni, două capitale, două guverne și două foruri legislative distincte și la Focșani se înființau o Comisie Centrală și o Înalță Curte de Casație care să elaboreze legi comune* SAU Convenția de la Paris are consecințe politice pentru Principatele Române. Informațiile care susțin punctul de vedere sunt: *În conformitate cu prevederile Convenției de la Paris, în Principate au fost constituite comisii provizorii [...] având sarcina de a asigura formarea adunărilor electivă, care urmau să desemneze cei doi domnitori. și La București, [...] ideea alegerii aceluiași domnitor – și ca urmare a lipsei de precizie a Convenției de la Paris, care nu interzicea explicit alegerea aceleiași persoane ca domnitor în cele două Principate – a căpătat susținere. etc.* **Punctajul total (10 puncte) sau cel parțial (7 puncte) se acordă răspunsului care cuprinde atât punctul de vedere, cât și informațiile/informația. Nu se punctează doar punctul de vedere sau doar informațiile/informația.**
6. **4 puncte** pentru argumentarea afirmației date - prezentarea oricărui fapt istoric relevant (**de exemplu:** participarea României la războiul ruso-otoman, aderarea României la Tripla Alianță etc.) prin precizarea a două informații referitoare la acest fapt și prin utilizarea conectorilor care exprimă cauzalitatea (*deoarece, pentru că* etc.) și concluzia (*așadar, astfel* etc.)

SUBIECTUL al III – lea

(30 de puncte)

Informația istorică – 24 de puncte distribuite astfel:

- **2 puncte** pentru precizarea oricărei acțiuni politice desfășurate în România, în perioada 1946-1947 (**de exemplu:** falsificarea rezultatului alegerilor parlamentare, înlăturarea monarhiei constituționale etc.)
 - **câte 3 puncte** pentru menționarea oricăror două practici politice utilizate în România, în perioada stalinismului (**de exemplu:** adoptarea Constituției din 1948, cenzura, colectivizarea etc.) și a oricărui aspect referitor la fiecare dintre acestea (**de exemplu:** legitimează regimul totalitar, prevede constituirea Marii Adunări Naționale etc., încalcă drepturile și libertățile cetățenilor, se redactează lista publicațiilor interzise etc., vizează desființarea proprietății private în mediul rural, determină represiunea țăranilor care se opun colectivizării etc.) **(3px4=12p)**
 - **2 puncte** pentru menționarea oricărui fapt istoric prin care România participă la relațiile internaționale din perioada *Războiului rece* (**de exemplu:** fondarea Pactului de la Varșovia, Conferința de la Helsinki etc.)
- 3 puncte** pentru prezentarea faptului istoric menționat - o scurtă expunere în care sunt precizate două informații referitoare la faptul istoric și se utilizează relația cauză-efect
- 1 punct pentru precizarea doar a unei informații referitoare la faptul istoric
- **1 punct** pentru formularea oricărui punct de vedere referitor la schimbarea regimului politic din România la sfârșitul secolului al XX-lea (**de exemplu:** La sfârșitul secolului al XX-lea, prin schimbarea regimului politic, în România se instaurează democrația.; Schimbarea regimului politic din România a fost realizată, la sfârșitul secolului al XX-lea, prin acțiuni anticomuniste. etc.)
- 4 puncte** pentru **susținerea punctului de vedere** formulat printr-un argument istoric – prezentarea oricărui fapt istoric relevant, prin precizarea a două informații referitoare la acest fapt și utilizarea conectorilor care exprimă cauzalitatea (*deoarece, pentru că* etc.) și concluzia (*așadar, astfel* etc.)

Ordonarea și exprimarea ideilor menționate – 6 puncte distribuite astfel:

- **2 puncte** pentru **utilizarea limbajului istoric** adecvat
 - 1 punct pentru utilizarea parțială a limbajului istoric adecvat
- **1 punct** pentru **structurarea eseului** (introducere - cuprins - concluzie)
- **2 puncte** pentru **respectarea succesiunii cronologice/logice** a faptelor istorice
 - 1 punct pentru respectarea parțială a succesiunii cronologice/logice a faptelor istorice
- **1 punct** pentru **respectarea limitei de spațiu**

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică $M_mate-info$

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Se consideră numărul complex $z = 3 + i$. Arătați că $z(z - 2i) = 10$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x + 1$. Arătați că $f(2x) - 2f(x) = -1$, pentru orice număr real x .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^3 - 2x + 2} = x$.
- 5p 4. Se consideră mulțimea A , a numerelor naturale de două cifre. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea A , numărul $n + 5$ să fie multiplu de 10.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4, 0)$ și $B(5, 4)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul O și este paralelă cu dreapta AB .
- 5p 6. Se consideră triunghiul isoscel ABC , dreptunghic în A , cu aria egală cu 4. Arătați că $BC = 4$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \\ a & a+1 & -2 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x + y + 2z = 2 \\ x - y + az = 4 \\ ax + (a+1)y - 2z = a \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(0)) = 8$.
- 5p b) Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.
- 5p c) Pentru $a = -2$, arătați că $x_0 z_0 + y_0 = -2$, pentru orice soluție (x_0, y_0, z_0) a sistemului de ecuații.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + (2^x - 2)(2^y - 2)$.
- 5p a) Arătați că $2 \circ 3 = 18$.
- 5p b) Arătați că $e = 1$ este elementul neutru al legii de compoziție „ \circ ”.
- 5p c) Demonstrați că $x \circ (-x) \leq 1$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3 \ln \frac{x+3}{x-1}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{(x-1)(x+3)}$, $x \in (1, +\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Arătați că $\ln \frac{x+3}{3(x-1)} \geq 1 - \frac{x}{3}$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^3 f(x) e^x dx = 18$.

- 5p b) Arătați că $\int_0^1 \frac{f(x)}{x+2} dx = \frac{e-2}{e}$.
- 5p c) Demonstrați că $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt \right) = 1$.

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z(z-2i)=(3+i)(3-i)=3^2-i^2=$ $=9+1=10$	3p 2p
2.	$f(2x)=10x+1$, pentru orice număr real x $f(2x)-2f(x)=10x+1-2(5x+1)=10x+1-10x-2=-1$, pentru orice număr real x	2p 3p
3.	$x^3-2x+2=x^3$, deci $-2x+2=0$ $x=1$	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea A sunt 9 numere n pentru care $n+5$ este multiplu de 10, deci sunt 9 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{9}{90}=\frac{1}{10}$	2p 3p
5.	$m_{AB}=4$ și, cum $d \parallel AB$, obținem $m_d=4$ Ecuația dreptei este $y-0=4(x-0)$, adică $y=4x$	3p 2p
6.	$AD=\frac{BC}{2}$, unde AD este înălțime în triunghiul ABC $A_{\triangle ABC}=\frac{AD \cdot BC}{2}=4$, de unde obținem $BC=4$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$ $=4+2+0-0-0+2=8$	2p 3p
b)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \\ a & a+1 & -2 \end{vmatrix} = -a^2+2a+8$, pentru orice număr real a $\det(A(a))=0 \Leftrightarrow a=-2$ sau $a=4$, deci matricea $A(a)$ este inversabilă dacă și numai dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 4\}$	2p 3p
c)	Pentru $a=-2$, soluțiile sistemului de ecuații sunt de forma $(2, -2-2\alpha, \alpha)$, cu $\alpha \in \mathbb{C}$ $x_0z_0+y_0=2\alpha-2-2\alpha=-2$, pentru orice soluție (x_0, y_0, z_0) a sistemului de ecuații	3p 2p
2.a)	$2 \circ 3 = 2 \cdot 3 + (2^2 - 2)(2^3 - 2) =$ $=6+12=18$	3p 2p

b)	$x \circ 1 = x \cdot 1 + (2^x - 2)(2^1 - 2) = x + 0 = x$, pentru orice număr real x	2p
	$1 \circ x = 1 \cdot x + (2^1 - 2)(2^x - 2) = x + 0 = x$, pentru orice număr real x , deci $e = 1$ este elementul neutru al legii de compoziție „ \circ ”	3p
c)	$x \circ (-x) = -x^2 + 1 - 2 \cdot 2^x - 2 \cdot 2^{-x} + 4 =$	2p
	$= -x^2 + 1 - 2 \cdot \left(2^x - 2 + \frac{1}{2^x}\right) = 1 - x^2 - 2 \cdot \left(\sqrt{2^x} - \frac{1}{\sqrt{2^x}}\right)^2 \leq 1$, pentru orice număr real x	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 1 + 3(\ln(x+3) - \ln(x-1))' = 1 + \frac{3}{x+3} - \frac{3}{x-1} =$	3p
	$= \frac{x^2 + 2x - 3 + 3x - 3 - 3x - 9}{(x+3)(x-1)} = \frac{x^2 + 2x - 15}{(x+3)(x-1)}$, $x \in (1, +\infty)$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x} \ln \frac{x+3}{x-1}\right) = 1$	2p
	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 \ln \frac{x+3}{x-1}\right) = 0$, deci dreapta de ecuație $y = x$ este asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	3p
c)	$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 3$; $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (1, 3] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(1, 3]$ și $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [3, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[3, +\infty)$, deci $f(x) \geq f(3)$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$	3p
	$f(3) = 3 + 3 \ln 3$, deci $x + 3 \ln \frac{x+3}{x-1} \geq 3 + 3 \ln 3$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$, de unde obținem $\ln \frac{x+3}{3(x-1)} \geq 1 - \frac{x}{3}$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$	2p
2.a)	$\int_0^3 f(x) e^x dx = \int_0^3 (x^2 + 2x) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2\right) \Big _0^3 =$	3p
	$= \frac{27}{3} + 9 = 18$	2p
b)	$\int_0^1 \frac{f(x)}{x+2} dx = \int_0^1 x(-e^{-x})' dx = x(-e^{-x}) \Big _0^1 - \int_0^1 -e^{-x} dx =$	3p
	$= \frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = \frac{e-2}{e}$	2p
c)	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x f(t) dt\right)'}{(x^2)'} =$	2p
	$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)e^{-x}}{2} = 1$	3p

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică M_{st-nat}

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $4 - 6\sqrt{3} + 3(2\sqrt{3} - 1) = 1$.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x - 3$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 3$. Determinați numărul real a pentru care $f(a) = g(a)$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x+1} \cdot 2^3 = 1$.
- 5p** 4. Determinați câte numere naturale, de două cifre distincte, se pot forma cu cifre din mulțimea $A = \{3, 4, 5, 6\}$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4, 0)$, $B(0, 2)$, $C(3, 3)$ și M , mijlocul segmentului AB . Arătați că segmentele MO și MC au lungimile egale.
- 5p** 6. Se consideră $E(x) = 2 \sin x \sin 2x - \cos x$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a) = \begin{pmatrix} 3+a & 2-2a \\ 1-a & 1+3a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(0)) = 1$.
- 5p** b) Arătați că $A(0) \cdot (A(a) - A(0)) = aI_2$, pentru orice număr real a .
- 5p** c) Demonstrați că $\det(A(a^2) - aA(a)) \geq 0$, pentru orice număr real a .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = x^2 - 4xy + 3y^2$.
- 5p** a) Arătați că $0 \circ 2 = 12$.
- 5p** b) Determinați numerele reale x pentru care $(2x) \circ x = -1$.
- 5p** c) Determinați perechile (m, n) de numere întregi, cu $m < n$, pentru care $m \circ n = 3$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5 + \frac{4x-4}{x^2}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{4(2-x)}{x^3}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că $|f(x) - f(y)| \leq 1$, pentru orice $x, y \in [1, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 4 \ln x$.
- 5p** a) Arătați că $\int_1^2 (f(x) - 4 \ln x) dx = 7$.
- 5p** b) Arătați că $\int_1^e x(f(x) - 3x^2) dx = e^2 + 1$.
- 5p** c) Demonstrați că $\int_1^{\sqrt{e}} f(x) F''(x) dx = \frac{(3e-1)(3e+5)}{2}$, pentru orice primitivă $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției f .

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$4 - 6\sqrt{3} + 3(2\sqrt{3} - 1) = 4 - 6\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 3 =$ $= 4 - 3 = 1$	3p 2p
2.	$5a - 3 = 2a + 3$ $a = 2$	3p 2p
3.	$2^{2x+4} = 2^0$, de unde obținem $2x + 4 = 0$ $x = -2$	3p 2p
4.	Cifra zecilor se poate alege în 4 moduri Pentru fiecare alegere a cifrei zecilor, cifra unităților se poate alege în câte 3 moduri, deci sunt $4 \cdot 3 = 12$ numere	2p 3p
5.	$M(2,1)$, de unde obținem $MO = \sqrt{5}$ $MC = \sqrt{5}$, deci $MO = MC$	3p 2p
6.	$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $E\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 =$ $= 3 - 2 = 1$	3p 2p
b)	$A(a) - A(0) = \begin{pmatrix} a & -2a \\ -a & 3a \end{pmatrix}$ $A(0) \cdot (A(a) - A(0)) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = aI_2$, pentru orice număr real a	2p 3p
c)	$A(a^2) = \begin{pmatrix} 3+a^2 & 2-2a^2 \\ 1-a^2 & 1+3a^2 \end{pmatrix}$, $A(a^2) - aA(a) = \begin{pmatrix} 3-3a & 2-2a \\ 1-a & 1-a \end{pmatrix}$ $\det(A(a^2) - aA(a)) = 3(1-a)^2 - 2(1-a)^2 = (1-a)^2 \geq 0$, pentru orice număr real a	2p 3p
2.a)	$0 \circ 2 = 0^2 - 4 \cdot 0 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 =$ $= 0 - 0 + 12 = 12$	3p 2p
b)	$(2x) \circ x = -x^2$, pentru orice număr real x $-x^2 = -1$, de unde obținem $x = -1$ sau $x = 1$	2p 3p

c)	$m \circ n = m^2 - mn - 3mn + 3n^2 = (m-n)(m-3n)$, pentru orice numere întregi m și n	2p
	$(m-n)(m-3n) = 3$ și, cum m și n sunt numere întregi cu $m < n$, obținem perechile $(-4, -1)$ și $(0, 1)$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{4x^2 - (4x-4) \cdot 2x}{x^4} =$	3p
	$= \frac{4x(2-x)}{x^4} = \frac{4(2-x)}{x^3}, x \in (0, +\infty)$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 + \frac{4x-4}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 + \frac{4}{x} - \frac{4}{x^2} \right) = 5$	3p
	Dreapta de ecuație $y = 5$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	2p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$; pentru orice $x \in [1, 2]$, $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1, 2]$ și pentru orice $x \in [2, +\infty)$, $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[2, +\infty)$	2p
	$f(1) = 5$, $f(2) = 6$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$, deci $5 \leq f(x) \leq 6$, pentru orice $x \in [1, +\infty)$, de unde obținem $ f(x) - f(y) \leq 1$, pentru orice $x, y \in [1, +\infty)$	3p
2.a)	$\int_1^2 (f(x) - 4 \ln x) dx = \int_1^2 3x^2 dx = x^3 \Big _1^2 =$	3p
	$= 8 - 1 = 7$	2p
b)	$\int_1^e x(f(x) - 3x^2) dx = \int_1^e 4x \ln x dx = \int_1^e (2x^2)' \ln x dx = 2x^2 \ln x \Big _1^e - x^2 \Big _1^e =$	3p
	$= 2e^2 - 0 - e^2 + 1 = e^2 + 1$	2p
c)	$F'(x) = f(x) \Rightarrow F''(x) = f'(x), x \in (0, +\infty)$	2p
	$\int_1^{\sqrt{e}} f(x) F''(x) dx = \int_1^{\sqrt{e}} f(x) f'(x) dx = \frac{f^2(x)}{2} \Big _1^{\sqrt{e}} = \frac{(3e+2)^2 - 3^2}{2} = \frac{(3e-1)(3e+5)}{2}$	3p

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică $M_{tehnologic}$

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $3 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = 4$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$. Determinați numărul real a pentru care $f(a) = 6$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_7(2x+1) = \log_7 9$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 23\}$, acesta să verifice inegalitatea $n \geq 10$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, 2)$ și $B(1, 6)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , cu $AC = \sqrt{2}$ și $BC = 2$. Arătați că triunghiul ABC este isoscel.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p** a) Arătați că $\det A = -1$.
- 5p** b) Arătați că $2B - A = 3C$.
- 5p** c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $2X \cdot A = B + 2C$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = (x-4)(y-4) + 4$.
- 5p** a) Arătați că $5 * 4 = 4$.
- 5p** b) Determinați numărul real x pentru care $x * 6 = 6x$.
- 5p** c) Determinați numerele naturale nenule n pentru care $\frac{4}{n} * n > 4$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 9$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = 3(x^2 + 4x - 5)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f .
- 5p** c) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{e^x f''(x)} = 0$.
2. Se consideră funcția $f: (-9, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{8x}{x+9}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^1 (x+9) \cdot f(x) dx = 4$.
- 5p** b) Arătați că $\int_1^6 \frac{1}{8x} \cdot f(x) dx = \ln \frac{3}{2}$.
- 5p** c) Determinați numărul real a pentru care $\int_0^3 f(x^2) dx = 6(4 + a\pi)$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$3 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{2} =$ $= \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$	3p 2p
2.	$f(a) = a + 2$ $a + 2 = 6$, de unde obținem $a = 4$	2p 3p
3.	$2x + 1 = 9$ $x = 4$, care convine	3p 2p
4.	Mulțimea A are 23 de elemente, deci sunt 23 de cazuri posibile În mulțimea A sunt 14 numere n care verifică inegalitatea $n \geq 10$, deci sunt 14 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{14}{23}$	2p 3p
5.	$x_M = \frac{-1 + 1}{2} = 0$, unde punctul M este mijlocul segmentului AB $y_M = \frac{2 + 6}{2} = 4$	3p 2p
6.	$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{2}$ $AB = AC$, deci triunghiul ABC este isoscel	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 =$ $= 3 - 4 = -1$	3p 2p
b)	$2B - A = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} =$ $= 3 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 3C$	3p 2p
c)	$B + 2C = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ $X = \frac{1}{2}(B + 2C) \cdot A^{-1}$, de unde obținem $X = \begin{pmatrix} 9 & -14 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	3p 2p
2.a)	$5 * 4 = (5 - 4)(4 - 4) + 4 =$ $= 1 \cdot 0 + 4 = 4$	3p 2p

Probă scrisă la matematică *M_tehnologic*

Varianta 1

Barem de evaluare și de notare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

b)	$x * 6 = 2x - 4$, pentru orice număr real x $2x - 4 = 6x$, de unde obținem $x = -1$	3p 2p
c)	$\left(\frac{4}{n} - 4\right)(n - 4) + 4 > 4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{n} - 1\right)(n - 4) > 0$, unde n este număr natural nenul Cum n este număr natural nenul, obținem $n = 2$ și $n = 3$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 3x^2 + 6 \cdot 2x - 15 =$ $= 3x^2 + 12x - 15 = 3(x^2 + 4x - 5), x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -5$ sau $x = 1$ $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, -5]$, deci f este crescătoare pe $(-\infty, -5]$, $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in [-5, 1]$, deci f este descrescătoare pe $[-5, 1]$ și $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [1, +\infty)$, deci f este crescătoare pe $[1, +\infty)$	2p 3p
c)	$f''(x) = 3(2x + 4), x \in \mathbb{R}$, deci $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{e^x f''(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x - 5}{e^x (2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 4}{e^x (2x + 4)} =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x (2x + 8)} = 0$	3p 2p
2.a)	$\int_0^1 (x + 9) \cdot f(x) dx = \int_0^1 8x dx = 4x^2 \Big _0^1 =$ $= 4 - 0 = 4$	3p 2p
b)	$\int_1^6 \frac{1}{8x} \cdot f(x) dx = \int_1^6 \frac{1}{x + 9} dx = \int_1^6 \frac{(x + 9)'}{x + 9} dx = \ln(x + 9) \Big _1^6 =$ $= \ln 15 - \ln 10 = \ln \frac{3}{2}$	3p 2p
c)	$\int_0^3 f(x^2) dx = \int_0^3 \frac{8x^2}{x^2 + 9} dx = 8 \int_0^3 \left(1 - \frac{9}{x^2 + 9}\right) dx = 8x \Big _0^3 - 8 \cdot \frac{9}{3} \arctg \frac{x}{3} \Big _0^3 = 24 - 6\pi$ $24 - 6\pi = 6(4 + a\pi)$, de unde obținem $a = -1$	3p 2p